Arealfunktioners differentialkvotient

OBS: Vis animationen i fuld skærm.

Udgangspunktet er funktionen $f(x) = \frac{1}{4}x^2$.

1) Træk frem og tilbage i x_o-værdien (det kræver lidt øvelse at trække det rigtige sted), og følg med i værdien for $f(x_o)$. Bekræft et par af værdierne, f.eks. $f(2)$ ved hjælp af hovedregning. Beskriv hvad der afgrænser det blå areal $A(x_o)$ – herunder: Hvilken rolle spiller værdien s? Prøv at vurdere hvor stort arealet $A(5)$ er (slå evt arealgitter til), *før* du sætter flueben i "Vis A(x)".
Når du sætter fluen i "Vis A(x)" kommer der et vindue med et ekstra koordinatsystem frem. Heri vises grafen for arealfunktion. Træk frem og tilbage i x_o og overbevise dig selv om sammenhængen mellem det blå areal og grafen for arealfunktionen. Se også hvilken betydning s-værdien har. Sæt s=1 og x_o=3 før du går videre.

2) Sæt flueben ved punktet "Vis ΔA". Der kommer nu en x-tilvækst, Δx, ind i billedet. Beskriv det grønne areal, ΔA, på så præcis en måde at én der ikke har set det vil kunne føje det på tegningen selv (hvis figuren lå på et stykke papir foran ham).

3) Fjern nu fluebenet i "Vis ΔA", og sæt det i "Vis $f(x_o)\cdot\Delta x$". Forklar hvorfor arealet af det gule område kan beregnes ved udtrykket $f(x_o)\cdot\Delta x$. Sæt igen flueben i "Vis ΔA", og begrund uligheden $f(x_o)\cdot\Delta x \leq \Delta A$.

4) Fjern de to flueben, og marker i stedet "Vis $f(x_o+\Delta x)\cdot\Delta x$". Forklar hvorfor arealet af det røde område kan beregnes ved udtrykket $f(x_o+\Delta x)\cdot\Delta x$. Sæt igen flueben i "Vis ΔA", og begrund uligheden $\Delta A \leq f(x_o+\Delta x)\cdot\Delta x$.

5) Sørg nu for at alle tre bokse har flueben. Træk så langsomt $x_o+\Delta x$ tættere på x_o. På denne måde kommer Δx tættere og tættere på 0. Læg mærke til at alle tre arealer $f(x_o)\cdot\Delta x$, ΔA og $f(x_o+\Delta x)\cdot\Delta x$ ligeledes nærmer sig 0. Læg også mærke til $\frac{\Delta A}{\Delta x}$. Hvad sker der med *den* størrelse?

Ovenfor har du i punkt 3 og 4 begrundet to uligheder. Forklar hvad der sker i de følgende trin:

$$f(x_0)\cdot\Delta x \leq \Delta A \quad og \quad \Delta A \leq f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{f(x_0)\cdot\Delta x}{\Delta x} \leq \frac{\Delta A}{\Delta x} \quad og \quad \frac{\Delta A}{\Delta x} \leq \frac{f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x}{\Delta x}$$
$$\Updownarrow$$
$$f(x_0) \leq \frac{\Delta A}{\Delta x} \quad og \quad \frac{\Delta A}{\Delta x} \leq f(x_0+\Delta x)$$
$$\Updownarrow$$
$$f(x_0) \leq \frac{\Delta A}{\Delta x} \leq f(x_0+\Delta x)$$

6) Når x_o=3 og Δx=1, så er arealfunktionens differenskvotient $\frac{\Delta A}{\Delta x}$ klemt inde mellem 2.25 og 4. Eksperimentér med at ændre x_o og Δx, og forklar hvad der sker med differenskvotienten. Inddrag uligheden ovenfor.

7) Hvilken ændring måtte man foretage i denne argumentation, hvis funktionen havde været aftagende? Og hvad ville der være sket, hvis funktionens graf havde ligget *under* x-aksen (negative y-værdier)? Og hvad nu hvis man ville benytte negative Δx-værdier?